المنطق والرياضيات

بقلم الدكتور ياسين خليل

(٢) تتمة

(ا) قاعدة الدراسات المنطقية

٢٦ — تتألف قضايا المنطق والرياضيات من ثوابت ومتغيرات ، ومن الأمثـــلة على الثوابت الرياضية المعروفة العدد ١ ، ٢ ، ٣ .. الخ + وهكذا أما المتغيرات فيرمز اليها عادة بحروف لغوية ولـكي نتعرف على الثوابت يجدر بنا الآن أن نستعرض بعض الأمثلة من الرياضيات والمنطق

المثال الأول

اذا ا / ب و ب / حـ فمن الضروري أن يكون ا / حـ »

يتـكون هذا المثال الرياضي من العناصر الآتية :

ا) من متغيرات هي ا ، ب ، حـ

ب) من محمول أو علاقة رياضية ذات موضوعين هي "/" حيث تشـير الى القسمة

حـ) من علاقة أو رابطة العطف بين العبارتين ا / ب و ب / حـ التي نشير اليها بالرمز « ٨ »

د) من رابطة الالزام التي تدل عليها العبارة اذا ... فمن الضروري ... التي نشير اليها بالرمز ——>

وبذلك نحصل الآن على الشكل المنطقي الآتي : —

(ا / ب ٨ ب / ح) ——> ا / ح

كما يمكن أن نضع رمزاً للقسمة ولكننا نحتفظ بهذا الرمز لأن القسمة علاقة رياضية

ولكن هذه الصيغة ليست كاملة لسبب بسيط هو أن القول في المتغيرات يجب أن يكون كلياً ، لأن الشكل المنطقي أو الصيغة صحيحة لكل ا وكل ب وكل ح وهذا يعني :

(ا) (ب) (ح) ((ا / ب ٨ ب / ح) ——> ا / ح)

والرموز (ا) (ب) (ح) تشير الى كل ا ، كل ب ، كل ح على التوالي

٢٧ — المثال الثاني

من المعروف في المنطق القديم ان مبدأ الثالث المرفوع Tertium — non datur يكون معياراً للمنطق ذي القيمتين ، لأنه ينص « ان القضية أما أن تكون صادقة أو كاذبة ولاوسط بينهما »

نلاحظ في هذا المبدأ المنطقي العناصر المنطقية الآتية : —

ا) القضية التي نرمز لها بالرمز ق

ب) رابطة البدل (او) ونرمز لها بالرمز ٧

ح) النفي ونرمز له بالرمز —

وبذلك يمكننا الآن وضع هذا المبدأ بالصيغة الآتية :

(ق ٧ — ق) أي اما القضية ق او ليس ق

٢٨ — كما نستطيع ان نعطي أمثلة أخرى لكشف دور الثوابت ، ولكننا نكتفي بهذا القدر ونعطي الآن قائمة بهذه الثوابت المنطقية بغية تحديد معانيها

١) النفي « ليس » Negation « — »

٢) العطف « و » Conjunction « ٨ »

٣) البدل « او » Alternative « ٧ » .

٤) الالزام « اذا .. فان » Implication « ——> »

٥) المساواة « اذا وفقط اذا » Equivalence « <——> »

٦) الذاتية Identity « = »

كما نضيف الى هذه المجموعة أســوار القضايا في الـكل والبعض Quantifications of Propositions

٧) كل ا For every (ا)

٨) بعض ا There is (ا ^{E})

٢٩ — يتحدد النفي بانه يقلب قيمة القضية التي يدخل عليها ، فاذا كانت القضيــة صادقة أصبحت بفضل النفي كاذبة ، واذا كانت كاذبة أصبحت صادقة وإذا رمزنا الآن إلى قيمة الصــدق بالرمز « ص » وللـكذب بالرمز « ك » ، فاننــا نستطيع أن نضع الآن جدول القيم للنفي

ٯ	— ٯ
ص	ك
ك	ص

وبهذا الجدول تتحدد قيمة ودور النفي في المنطق ويدعى هذا الجدول وغيره من الجداول التي تحدد قيمة ودور الثوابت أو الروابط المنطقية بجدول القيم [١]

٣٠ — أما رابطــة العطف فيمكن تحديد دورهــا المنطقي بالـكلمات الآتية : تـكون القضية المركبة التي تتألف من قضيتين بينهما رابطـــة العطف صادقة في حالة واحدة فقط

---

(١) أما الترجمة الحرفية فهي « جدول الصدق » ولـكننا نفضل عبارة « جدول القيم » لأن الجدول يحتوي على الصدق والـكذب معاً » ويبين علاقتهما تبعاً للرابطة المنطقية

وذلك عند صدق القضايا البسيطة ، ولكنها تكون كاذبة في الحالات الأخرى وعلى هذا الأساس يكون جدول القيم لرابطة العطف كما يأتي :

ں	ل	ں ∧ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ك
ك	ك	ك

وبعبارة أخرى تكون القضية (ں ∧ ل) صادقة إذا صدقت كل من ں و ل معاً ، وكاذبة إذا صدقت الأولى وكذبت الثانية او كذبت الأولى وصدقت الثانية أو كذبت الأولى والثانية معاً

ومن الأمثلة الرياضية والمنطقية لهذه الرابطة ما يأتي :

١ — سقراط فيلسوف وسقراط حكيم : القضية الأولى والثانية صادقة

٢ — سقراط فيلسوف روماني وسقراط حكيم : الأولى كاذبة والثانية صادقة والقضية بأجمعها كاذبة

٣ — سقراط فيلسوف روماني وسقراط جاهل: الأولى كاذبة والثانية كاذبة والنتيجة ان القضية بأجمعها كاذبة

٤ — ومن الأمثلة الرياضية :

(٢ + ٢ = ٤) و (٢ × ٢ = ٤) (ص ∧ ص) = ص

(٤ + ٢ = ٥) و (٢ × ٢ = ٤) (ك ∧ ص) = ك .

(٤ + ٢ = ٥) و (٢ × ٢ = ٥) (ك ∧ ك) = ك

٣١ — أما رابطة البدل فيمكن تحديد وظيفتها المنطقية بالطريقة التي فعلناها مع رابطة

العطف : تكون القضية المركبة (ن ٧ ل) صادقة اذا صدقت كل من ن و ل معاً أو كذبت احداها ، وتكون كاذبة في حالة واحدة اذا كذبت ن و ل معاً وتبعاً لهذا التحديد يكون جدول القيم كما يأتي :

ن	ل	ن ٧ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك

ومن الأمثلة على هذه الرابطة ما يأتي :

١ — رسل فيلسوف أو رسل رياضي (ص ٧ ص) = ص .

٢ — رسل فيلسوف أو رسل مسيحي (ص ٧ ك) = ص .

٣ — أرسطو روماني أو أرسطو يوناني (ك ٧ ص) = ص

٤ — أرسطو روماني أو أرسطو مصري (ك ٧ ك) = ك

ولنا في الرياضيات أمثلة كثيرة على هذه الرابطة :

٥ — (٢ × ٢ = ٤) أو (٢ × ٢ = ٤) (ص ٧ ص) = ص

٦ — ($٢^٢$ = ٤) أو ($٢^٢$ = ٥) (ص ٧ ك) = ص

٧ — ($٢^٢$ = ٥) أو ($٢^٢$ = ٦) (ك ٧ ك) = ك

٣٢ — ورابطة الالزام ضرورية في جميع الدراسات المنطقية ، ويمكن تحديد مفهومها ودورها المنطقي بالكلمات الآتية : تكون القضية (ن ——> ل) كاذبة في حالة واحدة فقط وذلك اذا صدقت الأولى وكذبت الثانية ، ولكنها تكون صادقة في جميع الحالات الأخرى وجدول القيم لهذه العلاقة يبين هذا التحديد بوضوح

ن	ل	ن ——> ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ص
ك	ك	ص

ومن الأمثلة على هذه الرابطة ما يأتي : —

١ — إذا كل إنسان فان فأن سقراط فان (ص ——> ص) = ص

٢ — اذا كل إنسان أوروبي فأن رسل أوروبي (ك ——> ص) = ص

٣ — إذا سقراط روماني فان سقراط مولود في ايطاليا (ك ——> ك) = ص

ومن الأمثلة الرياضية ما يأتي : —

٤ — اذا كانت (٤ > ٣) فان (٣ < ٤) (ص ——> ص) = ص

٥ — اذا كانت (٢ = — ٢) فان ($٢^٢ = (-٢)^٢$) (ك ——> ص) = ص

٦ — اذا كانت (٣ = ٢ + ٢) فان (٢ + ٢ = ٣) (ك ——> ك) = ص

٢٣ — أما رابطة أو علاقة المساواة فيمكن تحديدها على الوجه الآتي : تكون القضية (ن <——> ل) صادقة عند صدق كل من ن و ل معاً أو عند كذبهما معاً اما في الحالات الأخرى وعند ما تكون إحدى القضيتين كاذبة ، فان القضية (ن <——> ل) تكون كاذبة كذلك . وبناء على ذلك يكون جدول القيم كما يأتي : —

ن	ل	ن <——> ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ك
ك	ك	ص

٣٤ — وبعد هـذا التحليل نُحاول الآن ان نبين أنه من الممكن تقليص عدد هـذه الروابط وذلك بتعريف بعضها بالبعض الآخر ومن الممكن كما أظهرت الدراسات المنطقية ان نعرف جميع هـذه الثوابت المنطقية بواسطة ثابت منطقي واحد هو خط شيفر [١] Shefferscher Strich

فاذا افترضنا النفي والعطف كافكار غير معرفـة ، فاننا يجب ان نعرف بواسطتها بقية الروابط المنطقية

١) ں ٧ ل = — (— ں ٨ — ل)

وبعبارة أخرى ان القضية (ں ٧ ل) هي ليس (ليس ں وليس ل)

٢) ں ——> ل = — (ں ٨ — ل)

وبعبارة أخرى ان القضية (ں ——> ل) هي ليس (ں وليس ل)

٣) ں <——> ل = — [— (ں ٨ ل) ٨ — (— ں ٨ — ل)]

وبعبارة ثانية ان القضية (ں <——> ل) هي ليس [ليس (ں و ل) وليس (ليس ں وليس ل)] وبذلك نكون قد عرفنا هـذه الثوابت المنطقية بالاستعانة بالنفي والعطف فقط ويمكننا ان نختار النفي والبدل لتعريف بقية الثوابت ولـكننا فضلنا هذه العملية لما لها من اتصال وثيق بخط شيفر ، فاذا استطعنا ان نعرف النفي والعطف بواسطة خط شيفر فاننا نكون بذلك قد ارجعنا أو اخضعنا جميع هذه الروابط المنطقية إلى رابطة واحدة وهذا هو ما حصل بالفعل ولـكي نبين هذه العملية المنطقية بوضوح يجدر بنا أن نحدد خط شيفر أولاً :

---

1) Hermes, H., Einführung in die Mathematische Logik P. 25

<table dir="rtl">
<tr><th>ق</th><th>ل</th><th>ق | ل</th></tr>
<tr><td>ص</td><td>ص</td><td>ك</td></tr>
<tr><td>ص</td><td>ك</td><td>ص</td></tr>
<tr><td>ك</td><td>ص</td><td>ص</td></tr>
<tr><td>ك</td><td>ك</td><td>ص</td></tr>
</table>

يظهر من هذا الجدول أن القضية (ق | ل) كاذبة في حالة واحدة عند صدق كل من ق و ل وصادقة في الحالات الأخرى

وبهذه الرابطة نعرف الآن النفي والعطف كما يأتي :

٤) ـــ ق = ق | ق

٥) ق ٨ ل = (ق | ل) | (ق | ل)

٣٥ ــ اما الآن فنبحث بعض المتعادلات المنطقية Tautologies وذلك بالاستعانة بجداول القيم أما مفهوم المتعادلة فيمكن تحديده بالتعريف الآتي :

(١٢) تعريف المتعادلة :

المتعادلة صيغة تبقى صادقة مهما كانت قيم الصدق Truth-values التي نعطيها للقضايا الأولية التي تتألف منها الصيغة

ونختار الآن من المتعادلات الصيغ الآتية :

١) (ق ——> ل) = ـ ق ٧ ل

٢) ق ——> ل ٧ ق

٣) ـ ـ ق = ق

٤) ق ٨ ل ——> ق

ولكي نبين اهمية تعريف المتعادلة نأخذ المثال الأول ونعطي للقضايا الأولية مختلف القيم

ق	<——	ل	=	—	ق	٧	ن
ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ص	ك	ك
ك	ص	ص	ص	ص	ك	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ك

ونشرح الآن هذا الجدول : لقد اعطينا إلى ق و ل مختلف القيم وهي في الاعمدة ١ ، ٣ ، ٦ ، ٨ ويظهر من العمود الثاني انه بين علاقة الالزام وتحها القيم حسب تحديدنا لهذه العلاقة في الفقرة (٣٢) ، اما العمود الخامس فانه يمثل نفي القضية ق ، ومن نفي القضية ق والقضية ل توصلنا إلى صياغة قيم العمود السابع (انظر الفقرة ٣١) . اما العمود الرابع فانه يمثل النتيجة النهائية من العمود الثاني والعمود السابع ونجد أن القيم صادقة في جميع الاحوال وهذا تأكيد للتعريف وبرهان عليه

ولنأخذ الآن مثالا آخر ابسط من المثال الذي قدمناه

ق	<——	ل	٧	ق
ص	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ص	ك
ص	ص	ك	ص	ص
ك	ص	ك	ك	ك

يظهر من هذا الجدول ان النتيجة الموجودة في العمود الثاني صادقة في جميع الأحوال الممكنة ، وهذا بالطبع برهان على ان هذه القضية متعادلة

٣٦ — ومن العناصر المنطقية المهمة التي لم نبحثها لحد الآن هي اسوار القضايا ، وتتميز هذه الاسوار بانها عناصر مهمة في بناء حساب دالات القضايا Calculus of Propositional Functions وكما فعلنا بالنسبة للروابط المنطقية نستطيع كذلك ان نعرف سور قضية بسور آخر فلدينا الآن سور القضية الكلية وسور القضية الجزئية ، وعلى هذا الاساس يمكن تعريف الكلية بالجزئية وبالعكس

١) (ا) H ا = — [(ا E) — H ا] حيث يرمز H إلى محمول القضية

٢) (ا E) H ا = — [(ا) — H ا]

وعلينا ان نختار السور الاولي لنعرف الآخر ومن الجدير بالذكر ان مثل هذا الاختيار منوط بالمنطقي وبالنظرية المنطقية

(ب) مدارس المنطق الرياضي :

٣٧ — كان من اهداف الفلاسفة والمناطقة وعلماء الرياضيات كشف طبيعة القضايا الرياضية ومعرفة الأسس التي تقوم عليها الرياضيات وكانت معظم هذه الدراسات ذات طبيعة فلسفية بحتة ، ولم يتمكن احد منهم ان يدعم ادعاءه أو أقواله باسس علمية ولكن فريجه كان له السبق في بحث أسس الرياضيات ودعم مبادئه بصيغ منطقية ورياضية دقيقة.

وظهرت في هذا القرن عدة مدارس في فلسفة الرياضيات نذكر اهمها واكثرها انتشاراً وتأثيراً ، وهي :

١) المدرسة المنطقية Logistics ومن مؤسسيها جوتلوب فريجه ، برتراند رسل والفريد نورث هوايتهد

٢) المدرسة الشكلية Formalism ومن مؤسسيها دافيد هلبرت

٣) المدرسة الحدسية Intuitionism ومن مؤسسيها جوزيف برور J. Brouwer وهايتنج A. Heyting .

المدرسة المنطقية :

٣٨ — ليس من الممكن في هذه الرسالة الصغيرة ان نوفي المدرسة المنطقية حقها في بيان اصولها وافكارها المنطقية والرياضية ، خاصة وان لهذه المدرسة تراكيب رمزية معقدة تستعملها في بناء المنطق الرياضي وإخضاع الرياضيات إلى المنطق وكل ما نستطيع عمله هو أن نقدم الخطوط البارزة في النظرية كما نذكر من الاشياء ما نراه ضرورياً ومتجانساً مع هدف هذه الرسالة

٣٩ — يعرف رسل الرياضة البحتة بقوله : « الرياضة البحتة هي فئة جميع القضايا ذات الشكل« ن تستلزم ل » حيث تكون ن و ل قضايا تحتوي على متغير واحد أو أكثر كما تكون المتغيرات نفسها في القضيتين ، ولا تحتوي ن و ل أي ثوابت ما عدا الثوابت المنطقية والثوابت المنطقية كلها افكار يمكن تعريفها بواسطة الحدود الآتية : الالزام ، علاقة الحد بفئة هو عضو فيها ، وفكرة «بحيث» Such That ، وفكرة العلاقة وغير هذه الافكار التي تكون متضمنة في الفكرة العامة للقضايا التي لها الصورة (أو الشكل) المذكور » [1]

يتضح من هذا التعريف هدف المدرسة المنطقية في إخضاع قضايا الرياضيات إلى افكار وقضايا منطقية ولكي يتم هذا البرنامج يتوسل برتراندرسل بوضع الأسس العامة والاساسية للمنطق الرياضي

٤٠ — يتألف المنطق الرياضي لهذه المدرسة من اربعة فروع مهمة هي :

١ ـ حساب القضايا Calculus of Propositions

٢ ـ حساب دالات القضايا Calculus of Propositional Functions

٣ ـ حساب الفئات Calculus of Classes

---

1) Russell, B., The principles of Mathematics P. 3

٤ ـ حساب العلاقات Calculu of Relations

ولكل حساب من هذه الفروع مقوماته وافكاره المنطقية الخاصة به فيحتاج حساب القضايا إلى افكار أولية غير معرفة وإلى صيغ منطقية لا تفتقر إلى برهان . والغاية التي يتوخاها رسل من بحث حساب القضايا تتجلى في الحقيقة المنطقية ان النظرية الاستدلالية تبدأ من هذا الحساب لاشتقاق الرياضة البحتة من أسس منطقية [١]

وللنظرية الاستدلالية افكار أولية ، وهي في حساب القضايا ثلاث : القضية ، النفي والبدل ، وبواسطة النفي والبدل نعرف جميع الثوابت المنطقية (الروابط المنطقية) عدا اسوار القضية التي تدل على الكل أو على الجزء وبناء على هذا الاعتبار يمكن تعريف العطف والالزام بالاستعانة بالنفي والبدل كما يأتي :

ں ∧ ل = — (— ں ∨ — ل) [٢]

ں <—— ل = — ں ∨ ل [٣]

كما يمكن تعريف علاقة المساواة بالالزام والعطف

ں <——> ل = (ں <—— ل) ∧ (ل <—— ں) [٤]

اما البديهيات التي يختارها رسل لحساب القضايا فهي كما يأتي [٥] :

١ ـ ں ∨ ں <—— ں

٢ ـ ل <—— ں ∨ ل

٣ ـ ں ∨ ل —— ل ∨ ں

---

1) Russell æ Whitehead,, Principia Mathematica P. 90

2) Principia Mathematiea P. 12

3) Ibid.

4) Ibid.

5) Ibid. P. 13

٤ ـ ٮ ٧ (ل ٧ م) ——> ل ٧ (ٮ ٧ م)

٥ ـ (ل ——> م) ——> [(ٮ ٧ ل) ——> (ٮ ٧ م)]

والقوانين الاستنتاجية التي يستخدمها رسل في البرهنة على المبرهنات هي على نوعين :

ا ـ قانون التعويض Rule of Substitution إذا حصل التعويض في متعادلة فان الصيغة الناتجة تكون متعادلة أيضاً

وهذا القانون يسمح لنا ان نستنتج صيغة جديدة من صيغة أو مقدمة افترضت أولاً ومن الأمثلة على اهمية هذا القانون ما يأتي :

لنأخذ أولاً المتعادلة ل ——> ٮ ٧ ل

ثم نستعيض عن ل بالمتعادلة م ٧ — م وهو قانون الثالث المرفوع ، فينتج من ذلك المتعادلة الآتية :

(م ٧ — م) ——> ٮ ٧ (م ٧ — م)

ب ـ قانون الشرط المنطقي Modus Ponens إذا كانت القضية ٮ صادقة والقضية (ٮ ——> ل) صادقة فمن الضروري ان تكون القضية ل صادقة أيضاً

٤١ — وتختلف القضايا عن دالات القضايا التي تؤلف منطق دالات القضايا من حيث ان الاولى تتميز بكونها اما صادقة أو كاذبة اما بالنسبة لدالات القضايا فالأمر يختلف إذ لا يمكن ان نقول فيها إذا كانت العبارة « ا انسان » صادقة أو كاذبة اللهم إلا اذا عينا قيمة ا بان نقول « سقراط انسان » فعندئذ نحصل على قضية وعلى هذا الاساس يمكن تعريف دالة القضية كما يأتي :

(١٣) تعريف دالة القضية :

دالة القضية عبارة تحتوي على متغير واحد أو أكثر ، بحيث تصبح هذه

العبارة قضية في حالة تعيين قيم لهذه المتغيرات [١]

وبالاضافة الى ذلك نجد أن منطق دالات القضايا بحاجة إلى اسوار تدل على الكل أو على الجزء وهذا هو الذي هدى رسل إلى ان يضيف إلى مجموعة بديهياته في كتابه اصول الرياضيات بديهيات أخرى هي :

(ا) Hا ——> Hب[٢] [اذا كانت H مقولة على كل ا ، فانها مقولة على ب وبعبارة أخرى : ما هو مقول على الكل فانه مقول على أي شي]

Hأ ——> (E أ) Hب[٣] [إذا كانت H مقولة على ا ، فانها مقولة على ب على الاقل وبعبارة أخرى : ما هو مقول على واحد فانه مقول على البعض]

٤٢ — اما منطق الفئات فهم في إخضاع علم الحساب للمنطق فهو يكون بذلك احد الاجزاء الرئيسية في فلسفة الرياضيات ويعرف رسل الفئة مستعيناً بدالة القضية ولتوضيح ذلك نأخذ الدالة الآتية « ا انسان » حيث يوجد متغير واحد هو ا يمكننا الآن ان نستعيض عن ا باشخاص كثيرين مثل ارسطو ، سقراط ، كارناب ، رسل ، أحمد ، عبد الله ، وهكذا وكل واحد من هذه الأسماء يعطينا في الاخير قضية صادقة فتكون مجموعة الاشياء التي تحقق دالة القضية هي الفئة وعلى هذا الاساس يمكن تعريف الفئة كما يأتي :

(١٤) تعريف الفئة :

الفئة هي كل الاشياء التي ترضي (تحقق) دالة قضية [٤] ، وعلى اساس هذا التعريف تتعين الفئة بدالة قضية ولكن دالات القضايا تختلف من حيث الترتيب فهناك دالات

---

1) Russell, B., Introduction to Mathematieal Philosophy P. 155-156

2) Principia Mathematica P. 19

3) Ibid.

4) Ibid., 23

قضايا فيها المحمول يحمل على افراد ، بينما يمكن ان يحمل المحمول على محمولات وهكذا وبناء على ذلك تختلف الفئات كذلك والنظرية التي يقدمها رسل في هـذا المجال تسمى نظرية الانماط المنطقية Logical Types ولهـذه النظرية اهمية كبيرة في حل المتناقضات المنطقية والرياضية وتتصل بنظرية الفئات بديهية يقدمها رسل لاستنتاج حقائق منطقية مهمة هي بديهية الاخضاع Axiom of Reducibility التي تنص :

انه لكل دالة مهما اختلف ترتيبها ، توجد لها دالة حملية تساويها صورياً [١]

ويتميز منطق العلاقات بأنه أهم ما موجود في المنطق الرياضي في حالة اخضاع الرياضيات الى أفكار وأصول منطقية ولا تسعنا هذه الرسالة أن نبحث هذا الموضوع تفصيلاً ، ولكننا نذكر من هذه العلاقات المهمة في نظرية الفئات علاقة العضوية في فئة وعلاقة الذاتية ويمكن تعريف الذاتية كما يأتي :—

« ا هي ذات أو نفس ب » تعني ان جميع الصفات التي تنتمي أو تتصف بها ا تنتمي الى ب كذلك :

ا = ب = (H ا H <—— H ب [٢]

٤٣ — أما بالنسبة للبديهيات الأخرى التي تؤلف نظام البديهيات في كتاب أصول الرياضيات فهي بديهية اللانهاية وبديهية التعدد

بديهية اللانهاية Axiom of Infinity

اذا كان ا عدد أصلي استقرائي Inductive Cardinal Number فان العدد الذي يتبعه موجود [٣]

بديهية التعدد Multiplicative Axiom

لكل فئة تتألف من فئات لا تكون واحدة مهافئة فارغة Null-Class توجد فئة واحدة على الأقل لها حد واحد مشترك مع كل فئة من الفئات المذكورة [٤]

---

1) Ibid., 56　　2) Principia Mathematica P, 57

3) Introduction To Mathematical Philosophy P 131

4) Ibid:, 122

هذه هي البديهيات الرئيسة في كتاب أصول الرياضيات والتي تتوزع في منطق القضايا ودالات القضايا بالاضافة الى بديهيات الرياضيات في اللانهاية والتعدد وبديهية الاخضاع التي تتصل مباشرة بنظرية الأنماط المنطقية والفئات

المدرسة الشكلية

٤٤ - تختلف المدرسة الشكلية عن المدرسة المنطقية من نواح مختلفة وبصورة خاصة من حيث المبدأ والهدف والبرنامج فترفض المدرسة الشكلية بقيادة الرياضي دائيد هلبرت فلسفة المدرسة المنطقية القائمة على أساس امكانية اخضاع الأفكار والأصول الرياضية إلى المنطق وتنظر هذه المدرسة الى الرياضيات على أساس انها علم تراكيب الأشياء فعالم الرياضيات يقوم بدراسة صفات الأشياء ليستطيع بعد ذلك وضع نظام صوري مؤلف من رموز فقط ومن العلاقات التي تربط الرموز المختلفة تتكون البديهيات والقوانين الاستنتاجية والمبرهنات فالرياضي لا يهم بالأفكار بقدر اهتمامه بالرموز وعلاقاتها ، وهو يدرس الاعداد الطبيعية ليتعرف على خصائصها الصورية وما عليه إلا أن يعبر عن هذه الخصائص الصورية بتراكيب شكلية تكون على هيئة نظام رياضي

٤٥ — يهدف المدرسة الشكلية في برنامجها الى تخليص الرياضيات من المتناقضات وذلك بالبرهان على الأنظمة الرياضية بأنها خالية من التناقض ويمكن تحقيق هذا الهدف إذا وضعنا النظام الرمزي للرياضيات والمنطق جنباً إلى جنب ، وذلك ببناء نظام صوري يحتوي على الأفكار الرياضية والثوابت المنطقية

يبدأ هذا النظام بالنظرية الاستدلالية فيضع دائيد هلبرت بديهيات حساب القضايا أولاً [١]

---

(١) يذكر هذا النظام M. Black في كتابه طبيعة الرياضيات The nature of mathematics عند مناقشته للمدرسة الشكلية (ص ١٦٢) وقد أخذ هذا النظام عن رسالة علمية لهلبرت هي Die Grundlagen der Mathematik

١ — بديهيات الالزام

١ — ق ——> (ل ——> ق)

٢ — (ق ——> (ق ——> ل)) ——> (ق ——> ل)

٣ — (ق ——> (ل ——> م)) ——> (ل ——> (ق ——> م)).

٤ — (ق ——> ل) ——> ((م ——> ق) ——> (م ——> ل))

٢ — بديهيات البدل والعطف

١ — ق ∧ ل ——> ق

٢ — ق ∧ ل ——> ل

٣ — ق ——> (ل ——> ق ∧ ل)

٤ — ق ——> ق ∨ ل

٥ — ل ——> ق ∨ ل

٦ — ((ق ——> م) ∧ (ل ——> م)) ——> ((ق∨ل) ——> م).

٣ — بديهيات النفي

١ — (ق ——> ل ∧ — ل) ——> — ل

٢ — — — ق ——> ق

أما قوانين الاستنتاج فيهذا الحساب فهي قانون التعويض وقانون الاستنتاج القياسي.

٤٦ — أما البديهيات المعروفة في حساب دالاتْ القضايا والتي ذكرناها في المدرسة المنطقية ، فليس لها وجود بنفس الصيغة في المدرسة الشكلية ، لأن هلبرت يستعمل هذا الرمز (٤) ليتحاشى بذلك ذكر اسوار القضايا التي تدل على الكل أو على الجزء ، وبواسطة هذا الرمز يعرف هلبرت أسوار القضايا كذلك

٤ — بديهية ٤ المنطقية

١ — H (ا) ——> H (H ٤)

ومن الممكن أن نضع بدل هذه البديهية البديهيات التي سبق وان ذكرناها في منطق دالات القضايا عند دراستنا لبرنامج المدرسة المنطقية ، ولقد فعل هلبرت ذلك في بحث منطقي آخر [١]

٤٧ — ٥ — بديهيات التعادل (أو الذاتية)

١ — (ع ا) ——> (ا = ا)

اذا كان ا عدد طبيعي Natural number فان ا هو ا

٢ — (ع ا ∧ ع ب) ——> ((ا = ب) ——> (H (ا) ——> H (ب))))

اذا كانت ا و ب أعداداً ، فان ا هي ب إذا كانت H تنتمي إلى ا وتنتمي الى ب

٤٨ — ٦ — بديهيات العدد

١ — (ع ا) ——> (اَ ≠) (اَ تعني العدد الذي يتبع أو يأتي في الدور والترتيب بعد ا] ويمكن قراءة هذه البديهية كما يأتي : —

اذا كان ا عدد فان العدد الذي يتبع ا لايكون صفراً

٢ — (ع ا) ——> [{ H(٠) ∧ (ب) H (ب) ——> H (بَ)) } ——> H (ا)]

ويسمى هذا المبدأ بمبدأ الاستقراء الرياضي والذي يذكره بيانو في نظريته في الاعداد

1) Hilbert, D., & Ackermann, W., Grundzüge der theoretischen Logik P. 60

الطبيعية ، ويمكن وضع هذا المبدأ بالصيغة اللغوية الآتية » أن أي صفة تنتمي الى الصفر والى التابع لكل عدد له الصفة ، تنتمي إلى كل الأعداد

المدرسة الحدسية

٤٩ — تقترن المدرسة الحدسية بفلسفة خاصة ، فهي تختلف عن المدرسة المنطقية والمدرسة الشكلية في نظرها الى طبيعة الرياضيات فتعتبر المدرسة المنطقية والشكلية الرياضيات على أساس أنها علم يتميز بالثبوت وان جميع الأنظمة الرياضية ترجع في الأخير الى الأفكار والمباديء المنطقية كما هو الحال بالنسبة للمدرسة الأولى ، وتخضع هذه الأنظمة أو الرياضيات الى برهان المتانة Proof of Consistency أو عدم التناقض Widerspruchsfreiheit. بالنسبة للمدرسة الشكلية أما المدرسة الحدسية ومؤسسها برور فتؤكد على ديناميكية الرياضيات فلقد اعتقد سابقاً بصدق بعض القضايا الرياضية ، ولكن ذلك الاعتقاد لم يدم إذ سرعان ما أثبت خطأها

والبرنامج الذي اقترحه برور يؤكد على دور أهمية بناء الرياضيات على أسس عقلية أو حدسية دون أن نعرف طبيعة الأشياء سواء كانت موجودة مستقلة عن معرفتنا لها أم لا. وأهم ما يمتاز به فلسفة المدرسة الحدسية في الرياضيات انها :

١ — ترفض مبدأ الثالث المرفوع وتعتبره ليس ضرورياً في الرياضيات والمنطق مادمنا لا نبحث عن الأفكار الرياضية لنعرف فيما اذا كان لها وجوداً أم لا

٢ — وتعتبر الأفكار الرياضية والطرق البرهانية تعتمد على الحدس الذي يتصف به الرياضي وهذا يعني أن مصدر الرياضيات ليس المنطق بل العقل

٥٠ — واستطاع هايتنج من بناء النظام الشكلي للمنطق الحدسي بشكل لا يسمح فيه بظهور مبدأ الثالث المرفوع كمبدأ من المباديء المنطقية والمنطق الذي يريد هايتنج بنائه يتصل بالرياضيات ، لأنه يجد في الرياضيات تطبيقاً مباشراً ، ولا يهمه فيما إذا كان لهذا

المنطق تطبيقاً خارج المعرفة الرياضية [١]

أما النظام الشكلي لمنطق القضايا الحدسي فهو كما يأتي : —

١ — ق ←—— (ق ∧ ق)

٢ — (ق ∧ ل) ←—— (ل ∧ ق)

٣ — (ق ←—— ل) ←—— ((ق ∧ م) ←—— (ل ∧ م))

٤ — ((ق ←—— ل) ∧ (ل ←—— م)) ←—— (ق ←—— م)

٥ — ل ←—— (ق ←—— ل)

٦ — (ق ∧ (ق ←—— ل)) ←—— ل

٧ — ق ←—— (ق ∨ ل)

٨ — (ق ∨ ل) ←—— (ل ∨ ق)

٩ — ((ق ←—— م) ∧ (ل ←—— م)) ←—— ((ق ∨ ل) ←—— م)

١٠ — - ق ←—— (ق ←—— ل)

١١ — ((ق ←—— ل) ∧ (ق ←—— — ل)) ←—— — ق

والقوانين الاستدلالية ألمستخدمـة في هذا المنطق هي القوانين المنطقية المعروفة في المدرسة المنطقية وهي قانون التعويض وقانون الاستنتاج

٥١ — أما بالنسبة للبديهيات التي تؤلف النظرية الحدسية في منطق دالات القضايا ، فان هايتنج يشير الى ان منطق دالات القضايا يمكن الحصول عليه بواسطة الرموز والبديهيات والقوانين المعروفة في حساب دالات القضايا لهلبرت واكرمان مضافاً اليها بديهيات منطق القضايا الحدسي [٢]

---

1) Heyting, H , Intuitionism "An Introduction" p 101.

1) Heyting, A., Intuitionism, "An Introduction" p. 103.

ولكي نتعرف على البديهيات والقوانين الاستدلالية لهذا المنطق يجب أن نقدم أولاً بعض التعاريف الضرورية للتعابير التي ترد في هذه القوانين

(١٥) تعريف المتغير الحر Freie Variable

المتغير الحر هو متغير [رمز لا يدل على معنى ثابت] لا يظهر في مجال سور القضية الكلية أو الجزئية [١]

(١٦) تعريف المتغير المقيد Gebundene Variable

المتغير المقيد هو متغير يظهر في مجال سور القضية الكلية أو الجزئية [٢]

ومن الأمثلة على المتغير الحر قولنا مثلا « سقراط فيلسوف » وتحويلنا هذه القضية الى الشكل H ا حيث لا يرتبط ا بشيء معين ، فيمكن أن نستعيض عنه بأية لفظة لغوية أما المتغير المقيد فيظهر فيقولنا « كل انسان فان » التي لها الشكل (ا) H ا حيث يرتبط المتغير ا بالمجال الذي يشير اليه أو ينطبق عليه « كل » وكذلك الأمر بالنسبة الى بعض (E ا) H ا حيث يظهر ا مقيداً بمجال البعض

٥٢ — أما القوانين والبديهيات لمنطق دالات القضايا فهي [٣]

١ — بديهيات دالات القضايا

ا — (ا) H ا ——< H ب

ب — H ا ——< (E ب) H ب

٢ — القوانين الاستدلالية

ا — قانون الاستنتاج Modus Ponens

1) Hilbert & Ackermann. Grundzüge der theoretisthen Logik p 52.

2) Ibid

3) Ibid., p 60-61.

ں ——> ل

ں

أذن ل

ب — قوانين التعويض

١ — يمكن الاستعاضة عن متغير قضايا Aussagenvariable بأية صيغة — شرط أن يحدث هذا التعويض في جميع الأماكن التي يوجد فيها هذا المتغير

٢ — يمكن الاستعاضة عن متغير حر Freie Gegenstandsvariable بمتغير حر آخر شرط أن يحدث هذا التعويض في جميع الأماكن التي يوجد فيها هذا المتغير

حـ — قانون الاستبدال للمتغيرات المقيدة Gebundene Variable يمكن استبدال متغير مقيد في صيغة بمتغير مقيد آخر ، شرط أن يحدث ذلك في جميع الأماكن التي يوجد فيها ، وان تكون الصيغة الناتجة صالحة

ى — القوانين الخاصة بـ «كل» و «بعض»

١ — A ——> B ا

A ——> B (ا) ا

ويشترط في هذا القانون ان يحتوي الرمز الذي يأتي بعد علامة الالزام في الصيغة العليا على متغير حر هو ا ، بينما لا يوجد ا في A

٢ — B ا ——> A

B (ا E) ا ——> A

ويشترط في هذا القانون ما اشترط في القانون الأول ونجد في القانونين ان توفر الشروط يؤدي الى اشتقاق الصيغة السفلى من الصيغة العليا واذا لم تتوفر الشروط فلا يمكن حدوث ذلك كما يظهر من هذه القوانين ان بعضها ذكر في حساب القضايا للمدرسة

المنطقية كقانون الاستنتاج والقانون الأول من قوانين التعويض

٣ — فلسفة الرياضيات :

٥٣ — لكل مدرسة من المدارس المذكورة في المنطق الرياضي فلسفة تقوم عليها وتستند اليها في صياغة برنامجها العام في المنطق والرياضيات . كما ظهرت انتقادات كثيرة توجهها مدرسة إلى أخرى وغايتنا الآن ان نبين الأسس أو الفلسفة التي تعتمد عليها هذه المدارس والاختلافات الناتجة باختلاف الفلسفات

تؤكد المدرسة المنطقية بقيادة فريجه ، رسل وهوايتهد على امكانية وتحقيق اشتقاق الرياضيات البحتة من افكار وقضايا منطقية ولتحقيق هذا الغرض تضع هذه المدرسة النظريةالاستدلالية المنطقية التي تعتمد عليها الانظمة الرياضية المختلفة ، وتعمل على تعريف الافكار الرياضية بافكار منطقية لكي تكون هذه الافكار القاعدة المنطقية للنظرية الرياضية فاذا استطعنا ان نخضع الرياضيات البحتة إلى نظرية الاعداد الطبيعية ثم تعريف وارجاع افكار هذه النظرية ومبادئها إلى افكار وقضايا منطقية ، تحقق بذلك الغرض المطلوب وهو اشتقاق الرياضيات البحتة من هذه الافكار والقضايا المنطقية ولقد تمكن الرياضي المعروف بيانو من ارجاع الرياضيات البحتة إلى نظرية الاعداد الطبيعية ، فما على المدرسة المنطقية اذن إلا أن ترجع افكار ومبادىء هذه النظرية إلى المنطق وبين بيانو انه بالامكان اشتقاق أو بناء نظرية الاعداد الطبيعية من ثلاث افكار أولية وخمس بديهيات هي :

ا) الافكار الاولية وهي

الصفر ، التابع ، العدد

ب) البديهيات هي :

١ ـ ع ƺ [الصفر عدد]

٢ ـ (ا) [ا ε ع ——> اَ ε ع] (التابع لاي عدد هو عدد)

٣ ـ (ا) [ا ε ع ——> اَ ≠] (الصفر ليس تابع لاي عدد)

٤ ـ (ا) (ب) [ا ε ع ∧ ب ε ع ∧ اَ = بَ ——> ا = ب]

(لا يكون لعددين نفس التابع)، ويمكن قراءة هذه البديهية كما يأتي: (كل ا وكل ب ، إذا كان ا عدداً طبيعياً و ب عدداً طبيعياً وكان لهما نفس التابع ، فان ا هو ب)

٥ ـ (H) [ε H ∧ (ا) (ا ε ع ∧ ا ε H ——> اَ ε H ——> ع ⊃ H]

(كل صفة تنتمي إلى الصفر وإلى تابع كل عدد له الصفة ، تنتمي إلى جميع الاعـــداد)

[ع = فئة الاعداد الطبيعية ؛ ε = عضو في فئة ا ، ب = متغيرات لاعداد طبيعية ، H = صفة ، ع ⊃ H = الصفة H تنتمي إلى جميع الاعداد الطبيعية]

٥٤ — ينتقد رسل [1] الافكار الاولية لهذه النظرية على أساس أنها تفترض معرفتنا سابقاً ما هو العدد وما هو الصفر وما هو التابع ، إذ لم يعرف بيانو هـــذه الافكار واعتبرها غير معرفة في نظامه الرياضي وإذا فحصنا النظرية وجـدنا أن افكارها الاولية يمكن تفسيرها باشياء كثيرة مختلفة ، ورغم هذا التفسير تبقى البديهيات صادقة كذلك فاذا اخذنا الصفر على أساس انه « ١٠ » ، فان جميع البديهيات تبقى صادقة بهذا التفسير ؛ وهذا يعني ان نظام بيانو الرياضي لا يهم بالاشياء الخارجية ، بل انه يركز على برهنة القضايا الحسابية المختلفة ولـكن من المعروف ان الناس يسـتخدمون الاعداد لاغراض حسـابية في حياتهم اليومية ، فهم يجمعون الاشياء ويعطون لها عدداً معيناً ، وهـــذا ما لا تستطيع نظرية بيانو تقديمه فالخطوة الأولى التي يجب ان يتخذها رسل في اخضاع الرياضيات إلى المنطق وجعل القضايا الرياضية ذات نفع في الحياة اليومية ، هي ان يعرف الافكار الاوليـة لنظرية بيانو ، فيبـدأ بتعريف العدد ويجب ان نتذكر ان فريجه كان

1) Introduetion to Mathematical Philosophy p. 7.

أول من طرح هذا السؤال « ما هو العـــدد ؟ » على بساط البحث في كتابه أسس علم الحساب ، فناقش الافكار والتعاريف المختلفة وانتقدها ، وتوصل أخيراً إلى تعريف العدد مستعيناً ببعض الافكار المنطقية (١)

ولتعريف العـدد يحتاج فريجه إلى بعض الافكار المنطقيـــة التي يجب تعريفها أولاً مثل المشابهة أو المســاواة العددية Gleichzahlig ; Similarity فاذا اردنا ان نعرف فيما إذا كانت الاشياء الموجودة في فئة A تســاوي الاشياء الموجودة في فئـة B أم لا ، يجب علينا ان نضع اعضاء A جنب أعضاء B بعلاقة واحد ـ واحد ، لمعرفة فيما إذا كانت الفئة A تساوي B عددياً أم لا كما نستخدم العبارة : « الفئة A تساوي الفئة B » ونقصد بها ان الاشياء في الفئة الأولى تساوي عددياً الاشياء في الفئة الثانية وبناءً على ذلك نجـد انفسنا مضطرين إلى تعريف المســاواة العددية يعرف فريجه المساواة العددية كما يأتي : « الفكرة F تساوي عددياً الفكرة G » وتعني هذه العبارة ما تعنيه العبارة الآتية توجد علاقـة Q التي تربط الاشياء الموجودة تحت الفكرة F واحـد بواحـــد مع الاشياء الموجودة تحت G » (٢)

وتعريف رسل للمشابهه أو المساواة العددية لا يختلف عن تعريف فريجه بتاتاً ، فهو يقول : « يقال إن فئة تشبه فئة أخرى إذا وجدت علاقة واحد ـ واحد يكون لها ا فئة نطاق Domain بينما تكون ـــ الأخرى نطاق عكس (٣) ويمكن تعريف النطاق كما يأتي : لنفرض ان الرمز « لا » تمثل علاقة تربط ا و ب وان ا في الحالة الأولى تمثل فئة مؤلفة من حدود أو اعضاء ، بينما تكون ب في الحالة الثانية فئة ، فلدينا إذن :

---

1) Grundlagen der Arithmatik

2) Ibid,, p. 85.

3) Introduction to Mathematical Philosophy p. 16.

١ ـ (ا) ا لا ب

٢ ـ (ب) ا لا ب

ان ا في الحالة الأولى هو نطاق باعتباره فئة مؤلفة من حدود وترتبط بعلاقة مع شيء اما ب فهي النطاق المعكوس وهي فئة مؤلفة من حدود وترتبط بعلاقة مع ا

وبعد هذه التعريفات المنطقية وتعريف المشابهة بواسطتها يكون بالامكان الآن تعريف العدد لفئة بانه فئة من جميع تلك الفئات الشبيهة به » (١)

٥٦ — وبقي لرسل ان يعرف الآن ما هو الصفر وما هو التابع

الصفر هو فئة من فئات متشابهة لها الفئة الفارغة كعضو وحيد ، أو كما يعرفه رسل بالحرف الواحد : الصفر هو فئة عضوها الوحيد هو الفئة الفارغة (٢) اما تعريف التابع فيمكن توضيحه كما يأتي : إذا كانت لدينا فئة مؤلفة من حدود ، فان التابع سيكون عدد في الفئة المؤلفة من الفئة الأولى مضافاً اليها أي حـــد لا ينتمي إلى الفئة (٣) فاذا كان الرمز ع يمثل العدد ، فان التابع لهذا العدد سيكون ع + ١

وبهذه الطريقة استطاع رسل ان يعرف الافكار الاولية لنظرية بيانو بأفكار منطقية ، وهذا يعني انه تمكن من اخضاع الرياضيات إلى الافكار المنطقية التي استخدمها في عملية التعريف والتحويل

٥٧ — ومن عرضنا المنطقي للمدرســة المنطقية وجـدنا ان رسل يستعين بالبديهيات المنطقية لاخضاع الرياضيات إلى المنطق وسؤالنا الذي لا بد وان يوجه إلى هذه البديهيات هو : هل هذه البديهيات جميعها ذات طبيعة منطقية أم لا ؟

يظهر من النقد الذي وجـــه إلى نظرية رسل المنطقية ان البديهيات الوجودية

1) Introduction to Mathematical Philosophy p 18

2) Ibid., 23.

3) Ibid.

وهي بديهية الاخضاع واللا نهاية والتعدد Existence Axioms تمثل وضعاً شاذاً في نظام Principia Mathematica لانها ليست ذات طبيعة منطقية ولكن رســـل أدخلها ليتم برنامجه في أسس الرياضيات ، ولقد حاول رامزي [1] اصلاح هـــذه البديهيات مستعيناً بنظرية فتجنشتاين [2] في القضايا المتعادلة

٥٨ – ولقــد وجهت انتقادات كثيرة إلى نظرية الانماط المنطقية التي أدخلها رسل للحيلولة دون حدوث المتناقضات وبالتالي لحل المتناقضات المعروفة في المنطق والرياضيات وعلى سبيل المثال نذكر ما اكتشفه رســـل في نظرية فريجه المنطقية من تناقض ، فلقد لاحظ رسل انه بالرغم من ان الفئة لا تكون هي احـد اعضائها ، فان الاحتمال ممكن بان تحتوي الفئة ذاتها كعضو ما دامت الفئة الـكلية Universal Class وهي الفئة التي تضم كل شيء ، فهي إذن عضو في الفئة الـكلية ويظهر التناقض اكثر وضوحاً اذا كان لدينا فئة من جميع تلك الفئات التي هي ليست اعضاء في ذاتها ؛ وهذه الفئة يجب ان تكون اما عضو في ذاتها أم لا ، وكل احتمال يتضمن الآخر

لذا يدخل رســل نظرية الانماط المنطقية ليتمكن من اخضاع الرياضيات إلى المنطق بعيداً عن المتناقضات ونظرية الانماط هذه تتألف من شعبتين :

١ ـ الشق الأول وهو البسيط إذ يميز انماط دالات القضايا بالنسبة لنوع حدودها

أ ـ دالة حدودها افراد وهذه هي أول نوع من الدالات

ب ـ دالة حدودها دالات ، وبعبارة أخرى دالة الدالات

ج ـ ثم دالة الدالات للدالات وهكذا

٢ ـ الشق الثاني ويسمى بالنظرية المتفرعة Branched Theory وهو يأخذ بنظر الاعتبار

---

1) Ramsey, F. P., The Foundations of Mathematics

2) Wittgensteind, L., Tractatus Logico-Philosophicus.

تعريف الدالات وترتيبها تبعاً لذلك

ا ـ الدالات الاولية وهي التي تكون قيمها قضايا بسيطة مترابطة ومحدودة .

ب ـ ثم تعرف الدالة بالاشارة إلى مجموع القضايا البسيطة وهكذا .. ولكن هذه النظرية لا تستطيع ان تخلص المنطق والرياضيات من جميع المتناقضات بالرغم من انها تمثل الحل الوحيد في النظرية المنطقية لابعاد المتناقضات الرياضية المعروفة

٥٩ — اما بالنسبة للمدرسة الشكلية ، فانها تلتزم طريقة أخرى في ابعاد المتناقضات من الانظمة الرياضية وذلك بواسطة برهان الثبوت ، حيث يخطو الفرد خطوة فاخرى ليتثبت فيما إذا كان هناك تناقض ولهذه المدرسة فلسفة تبدأ بانجازات هلبرت العلمية في حقل الهندسة حيث وضع هندسة اقليدس على أساس بديهي [١] مستعيناً ببعض الافكار الاولية في الهندسة واصبحت الرياضيات بالنسبة لفلسفة هذه المدرسة مجرد ارتباطات رمزية وتراكيب رياضية ليس لها معنى بتاتاً ، وبعبارة أخرى : ان الرياضيات نظرية شكلية مؤلفة من بديهيات وقضايا يبرهن عليها ، ويجب ان يبرهن على هذه النظرية بانها خالية من التناقض ، والطريقة التي يستعملها هلبرت تتلخص بان يعطي نموذجاً Model للنظرية والنموذج للنظرية البديهية هو نظام اشياء مختارة من نظرية اخرى توفي البديهيات [٢]

٦٠ — وإذا كانت لدينا نظرية مؤلفة من بديهيات منطقية أو رياضية ، فاننا نسأل فيما إذا كانت هذه النظرية خالية من التناقض ، وهل ان نظامها المؤلف من البديهيات كامل أو تام

تكون البديهيات خالية من التنافض إذا كان من المستحيل ان نستنتج القضية

---

1) Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie.

2) Kleene, S. C , Inrroducation to Meta-mathematics p. 53

ونقيضها معاً، وبعبارة أخرى لا تمكن ان نستنتج ٨٧ـ من النظام الحالي من التناقض .

ويكون نظام البديهيات تاماً اذا استطعنا ان نشتق منه جميع القضايا الصحيحة

٦١ — واذا كانت النظرية المنطقية مؤلفة من دالات قضايا ، وان دالة القضية كما بينا لا تكون صادقة أو كاذبة إلا إذا اعطينا لمتغيراتها قيمة معينة ، فاننا في هذه الحالة نلجأ إلى التفسير Interpretation وهو عبارة عن عملية اقران قيم (اشياء) بالمتغيرات الموجودة في دالات القضايا وبعبارة أخرى يجب ان نميز أولاً وقبل كل شيء بين :

١ ـ منطق القضايا

٢ ـ منطق دالات القضايا

ولقد برهن كورت جودل على ان حساب الدالات المنطقي تام البديهيات [١] وكان ذلك في سنة ١٩٣٠ ، وفي سنة ١٩٣١ تمكن جودل من اثبات حقيقة منطقية ورياضية مهمة وهي ان حساب دالات القضايا وكل حساب مثله لا يستطيع ان يبرهن على بعض القضايا التي تظهر انها صادقة ، وهذا يعني بطبيعة الحال ان مثل هذه الانظمة غير تامة [٢] وبدأت من هنا مرحلة جديدة لان الطريقة التي اتبعها المناطقة والرياضيون في البرهان الشكلي ستترك دائماً قضايا أو صيغاً صحيحة خارجة عن البرهان فاما ان نجد طريقاً آخر لحل هذه الازمة أو أن نستعمل طريقة رياضية أو منطقية أخرى في البرهان بحيث نستطيع بواسطتها ان نبرهن على جميع القضايا الصحيحة ، وعلى القضايا التي سبق عدم البرهان عليها بحيث لا تؤدي إلى تناقض

وفي الوقت الذي بدأ به هلبرت طريقته في برهان الثبوت لتخليص الانظمة المنطقية

---

1) Gödel' K., Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls

2) Gödel, K, Über formale unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme

والرياضية من التناقض بدأت مرحلة جديدة في الرياضيات ، حيث بدأ المناطقة يعملون على بناء انظمة منطقية أو رياضية تصف أو تتحرى انظمة رياضية أخرى وهذا الفرع من المعرفة هو الرياضة الفوقية Meta-Mathematics

اما المدرسة الحدسية فانها تتخذ موقفاً جديداً من الرياضيات والمنطق مقروناً بفلسفة معينة فعالم الرياضيات يفترض الافكار الاولية للنظرية الرياضية معتمداً على الحدس فقط فيقوم ببناء النظام دون ان يأخذ بنظر الاعتبار ما تشير أو تدل عليه الافكار ، ففي المنطق مثلاً يعتبر اصحاب المدرسة المنطقية والشكلية قانون الثالث المرفوع من القوانين الضرورية وهو في اعتقاد المدرسة الحدسية السبب الاساسي في ظهور المتناقضات لاننا سنبحث عن الوجود وعدمه وعن صدق القضية وكذبها ، لذا ترفض المدرسة الحدسية هذا القانون ولا تدعه يكون بديهية أو مبرهنة في النظام المنطقي ، ولقد رأينا هايتنج يضع منطقه الحدسي بشكل لا يسمح لقانون الثالث المرفوع في الظهور ، ففي النظرية المنطقية وجدنا رسل يضع بديهيته في اللا نهاية على أساس وجود اللا نهاية ولكن الحدسية تناقش مفهوم « موجود » فاذا كان معناه « بنائي » فلا اعتراض على ذلك اما إذا كان مفهوم ميتافيزيقي فان الحدسية لا تأخذه ولا تسلم به [1] وعلى هذا الاساس يرفض برور قانون الثالث المرفوع للفئات اللا نهائية فاذا اخذنا الاعداد الطبيعية كمثال فاننا سنجد دائماً عدداً آخر مضافاً الى العدد السابق ، وهذا يعني إذا كان العدد ع فان ما يتبع هذا العدد ع + ١ موجود اما بالنسبة لبرور فان القضية ليست بهذه البساطة بحيث يعتبر وجود اللا نهاية وهذا مما جعل برور وثايل [2] يعتقدان انه لا يوجد اثبات للاعتقاد بوجود اللا نهاية

1) Heyting, A., Intuitionism "An Introduction" p. 2.

2) Kleene, S C., Introduction to Meta-Mathematics p 48

٦٣ — وبالنسبة الى برور تكون الرياضيات نابعة من تفكيرنا فقط ولا توجد فلسفة أو منطق تكون أساساً للرياضيات ، فلا يوجد أمام الرياضي إذن إلا الحدس الذي بواسطته يحصل على الأفكار ويبني المبادئ والاستنتاجات التي تبدو واضحة للعيان ومن رفض قانون الثالث المرفوع ونفي اللانهاية لم يبق للحدسيين إلا أن يأخذوا بنظر الاعتبار الفئات النهائية لأن البرهان على وجود الفئات اللانهاية غير موجود ، وبعبارة أدق تكون القضايا التي تضم فئات أو متواليات لا نهائيـة غير مبرهنة وهذا الموقف للمدرسـة الحدسية سيؤدي في النهاية إلى التخلي عن كثير من فروع الرياضيات التي لا تزال موجودة ومأخوذ بها .

فالمشكلة الأساسية التي لا تزال تعترض هذه المدارس هي المتناقضات وتأسيس الرياضيات على المنطق كما هو الحال بالنسبة للمدرسة المنطقية ، وذلك بوضع بديهيات منطقية وأخرى وجودية وكان اعتراض الشكلية منصباً على ان المدرسة المنطقية لم تفلح في برنامجها في ارجاع الرياضيات الى المنطق ، فاقترحت هي طريقة بواسطتها تبني أنظمة خالية من التناقض ولكن هذه الطريقة بالذات تحتاج نموذج مثل الأعداد الطبيعية أو نموذج من أنظمة رياضية أخرى فبدل أن يضع هلبرت بديهيات وجودية نجده ينتقل الى أشياء خارجة عن النظرية ليرى فيما إذا كانت هذه الأشياء تحول البديهيات الى قضايا صادقة أم لا

ان المدرسة الشكلية لا تستطيع ان تبين لنا أهمية الرياضيات في الحياة العملية ، لأنها تبدأ من أفكار غير معرفة ومبادئ تتألف من هذه الأفكار ، فالنظام الرياضي سوف يكون مجرد تركيب فيه رموز لا معنى لها وقضايا أو صيغ لا تدل على معنى بتاتاً [١]

أما بالنسبة للمدرسة الحدسية فإن عدم الأخذ بها واضح ، لأن الحدس لا يمكن أن يؤخذ معياراً لبناء الأنظمة الرياضية والمنطقية كما ان الأخذ بهذه النظرية يؤدي بنا الى التخلي عن فروع كثيرة مهمة في الرياضيات

---

1 Ramsey, F P, The Foundations of Mathematics p. 2.

أما بالنسبة للمدرسة المنطقية فأعتقد انها أكثر هذه المدارس نجاحاً ، وبالأخص بعد أن اختفت بعض الانتقادات التي وجهت اليها بفضل تبسيط نظرية الأنماط المنطقية ومن البحوث المهمة التي تؤيد ان الرياضيات مشتقة من المنطق هو بحث يورجنسن [١] الذي أيد ان الرياضيات منطق وان المنطق رياضيات وبمعنى آخر ان الرياضيات هي المنطق وان المنطق أساس لها واذا كانت قضايا المنطق متعادلات منطقية فان الرياضيات ستكون مؤلفة من قضايا هي متعادلات منطقية كذلك وتتميز المتعادلات بانها صادقة في جميع الأحوال وفي كل احتمال [٢]

ياسين خليل

---

1) Jörgensen, J , A. Treatise of Formal Logic.

2) Wittgenstein, L , Tractatus Logico-philosophicus 4 46

محتويات البحث

جدول الرموز

ا ، ب ، حـ ... متغيرات حدود

ق ، ل ، م ... متغيرات قضايا

H	محمول أو صفة
A ، B	صيغ فيها متغير ، أو فئات
ع	فئة الأعداد الطبيعية
ـَ	التابع
3	علاقة عضو في فئة
لا	علاقة
—	النفي
٨	العطف
٧	البدل
<——	الالزام
<——>	المساواة
=	الذاتية ، علامة التعريف
(E ا)	بعض ا ، أو يوجد ا
(ا)	كل ا

مراجع البحث

Aristotle's Organon — (Translated into English; D W Ross Oxford ..

Black, M , — The nature of mathematics; London, 1955.

Carnap, R., — The logical syntax of language; London, 1954
Abriss der Logistik; wien, 1929

Church, A , — Introduction to mathematical logic; vol. 1 Princeton, 1959.

Curry, B H , — Outlines of a formalist philosophy of mathematics; Amsterdam, 1958

Curry, B H., & Feys, R.. — Combinatory logic; Amesterdam, 1258

Frege, G , — Begriffsschrift; Halle, 1879.
Grundlagan der Arithmatik; Breslau, 1884 (Translated into English by J. H Austin, 1953)
Grundgesetze der Arithmetik; Jena, I, 1893: II, 1903.

Gödel, K., — Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls; Monatsh. Math. Phys. 37; 1930
Über formale unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme; I. Monatsh Math Phys 38, 1931

Hermes, H., — Einführung in die mathematische Logik; Münster/Westf 1957

Heyting, A., — Intuitionism "An Introduction"; Amsterdam, 1956.

Hilbert, D , — Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899

——— & — Grundzüge der theoretischen Logik; 3 Auflage.

Ackermann, W.,	Springer-Verlage, 1949
Hilbert, D,	Die Grundlagen der Mathematik; Abh. aus d math. Sem d. Hamb. Univ. 1928.
Jörgensen, J,	The Development of logical Empiricism; International Encyclopedia of Unified Science, vol II No. 9, Chicago, 994.
Jörgensen, J	A Treatise of formal logic; Three volumes, Oxford, 1951
Kleene, S C,	Introduction to Meta-mathematics; Amsterdam, 1959.
Lukasiewicz, J,	Aristotle's Syllogistic, Oxford, 1957.
Ramsey, F P.,	The Foundations of Mathematics; London, 1954.
Reichenbach, H.,	Elements of symbolic logic; New York. 1947
Rosser, J B., & Turquette, A R.,	Many-valued Logics, Amsterdam, 1958.
Russell, B.,	The principles of mathematics, London, 1956
————	Introduction to Mathematical philosophy; London, 1956
with Whitehead.,	Principia Mathematica; I,II,III, Cambridge, 1957
Scholz H,	Abriss der Geschichte der Logik; Freiburg München, 1959.
Tarski, A.,	Introduction to logic; Oxford, New York, 1956. Oxford, 1956.
Wittgenstein, L,	Tractatus logico-phitosophicus; London, Kegan, 1955.